Introduction à la Géométrie de l'Interaction

Le projet original de Girard pour la logique linéaire multiplicative (MLL)

Cercle Transcendantaliste

Boris Eng

Le constat de Girard

"Towards a Geometry of Interaction" (Girard, 1989)

↳ Une "sémantique géométrique du calcul"

Le constat de Girard

"Towards a Geometry of Interaction" (Girard, 1989)

↳ Une "sémantique géométrique du calcul"

Réseaux

Le constat de Girard

"Towards a Geometry of Interaction" (Girard, 1989)

↳ Une "sémantique géométrique du calcul"

Oubli de la logique

Réseaux

Le constat de Girard

"Towards a Geometry of Interaction" (Girard, 1989)

↳ Une "sémantique géométrique du calcul"

$$\text{Réseaux} \xrightarrow{\textbf{Oubli de la logique}} \text{Objet calculatoire } (\simeq \text{programme})$$

Le constat de Girard

"Towards a Geometry of Interaction" (Girard, 1989)

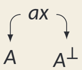
↳ Une "sémantique géométrique du calcul"

$$
\begin{tikzcd}
\text{Réseaux} \arrow[rr, bend left, "\textbf{Oubli de la logique}"] & & \text{Objet calculatoire } (\simeq \text{ programme}) \arrow[ll, bend left, "\textbf{Formatage géométrique / Critères de correction } (\simeq \textbf{ spécification})"]
\end{tikzcd}
$$

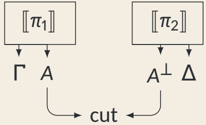
Critère de longs voyages

Retrouver l'arborescence

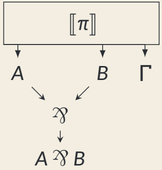
$$\dfrac{}{\vdash A, A^\perp}\ \mathrm{ax} \quad \longrightarrow_{[\![\cdot]\!]}$$



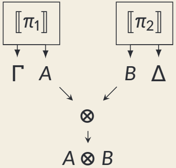
$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ \vdots \\ \vdash \Delta, A^\perp\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \mathrm{cut} \quad \longrightarrow_{[\![\cdot]\!]}$$



$$\dfrac{\begin{matrix}\pi \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, A, B\end{matrix}}{\vdash \Gamma, A \parr B}\ \parr \quad \longrightarrow_{[\![\cdot]\!]}$$

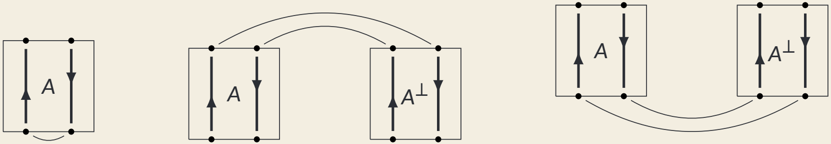


$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ \vdots \\ \vdash \Delta, B\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ \otimes \quad \longrightarrow_{[\![\cdot]\!]}$$



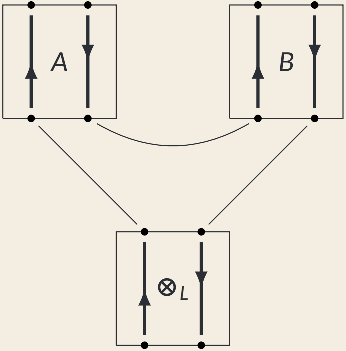
Critère de longs voyages

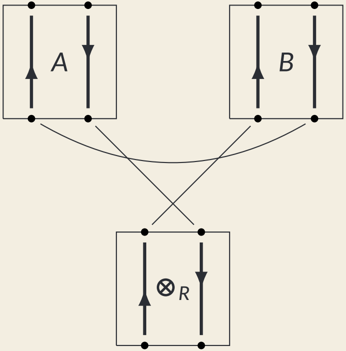
Le courant du réseau : cas conclusion, axiome, coupure



Critère de longs voyages

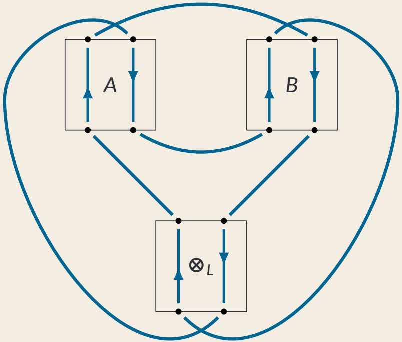
Le courant du réseau : cas tenseur



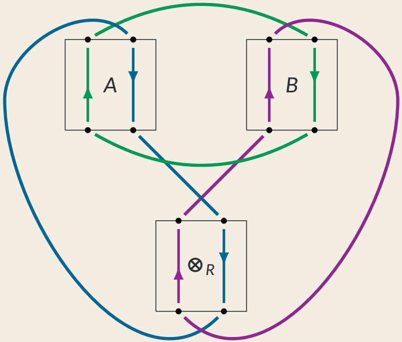


Critère de longs voyages

Le courant du réseau : cas tenseur (exemple)



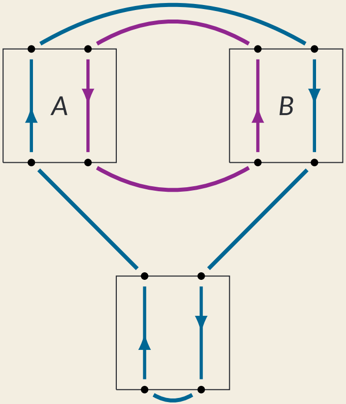
Long voyage

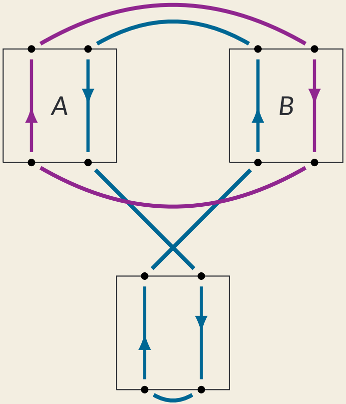


Courts voyages

Critère de longs voyages

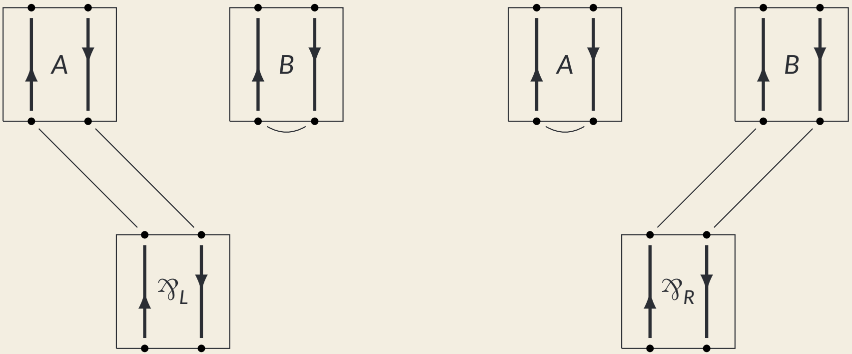
Le courant du réseau : cas par (exemple)





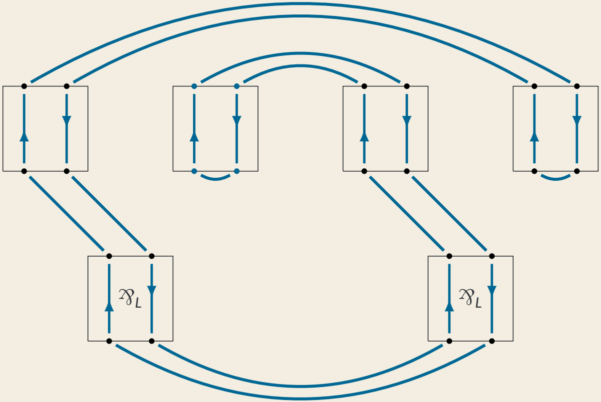
Critère de longs voyages

Le courant du réseau : cas par



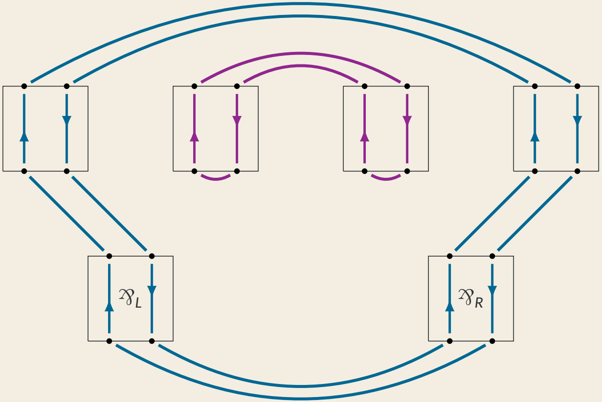
Critère de longs voyages

Exemple de preuve correcte



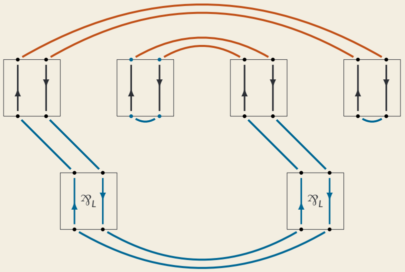
Critère de longs voyages

Exemple de preuve correcte



Théorie des réseaux vidée de logique

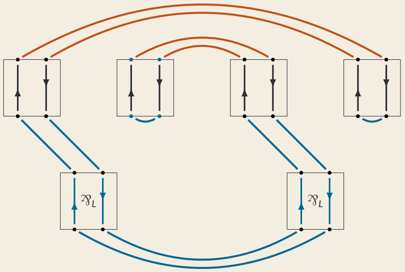
Décomposition calcul/logique



Théorie des réseaux vidée de logique

Décomposition calcul/logique

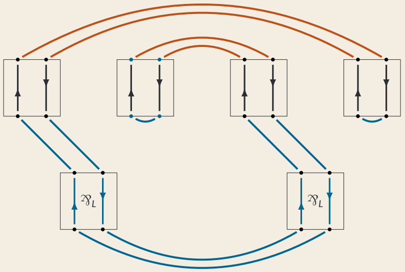
- En **haut** : véhicule / partie calcul ;



Théorie des réseaux vidée de logique

Décomposition calcul/logique

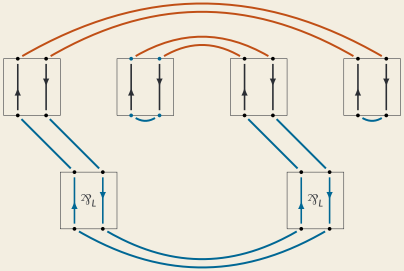
- En **haut** : véhicule / partie calcul ;
- En **bas** : test (gabarit) / partie logique ;



Théorie des réseaux vidée de logique

Décomposition calcul/logique

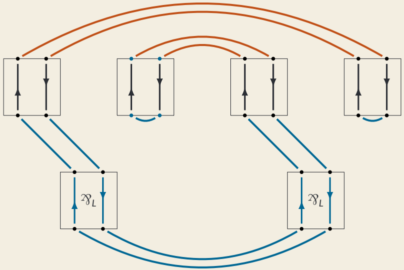
- En **haut** : véhicule / partie calcul ;
- En **bas** : test (gabarit) / partie logique ;
- Une communication entre les deux

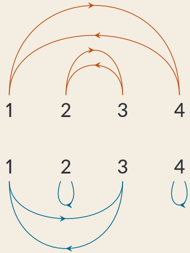


Théorie des réseaux vidée de logique

Décomposition calcul/logique

- En **haut** : véhicule / partie calcul ;
- En **bas** : test (gabarit) / partie logique ;
- Une communication entre les deux

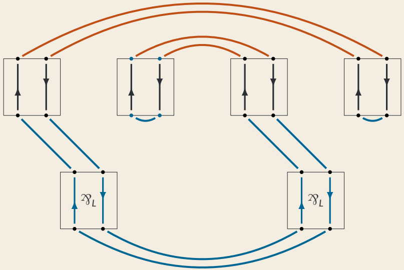


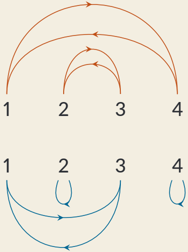


Théorie des réseaux vidée de logique

Décomposition calcul/logique

- En **haut** : véhicule / partie calcul ;
- En **bas** : test (gabarit) / partie logique ;
- Une communication entre les deux



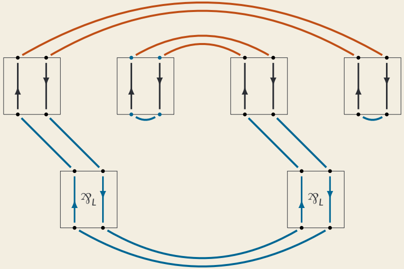


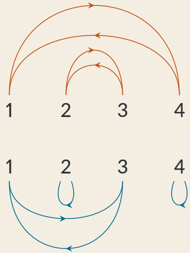
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Théorie des réseaux vidée de logique

Décomposition calcul/logique

- En **haut** : véhicule / partie calcul ;
- En **bas** : test (gabarit) / partie logique ;
- Une communication entre les deux

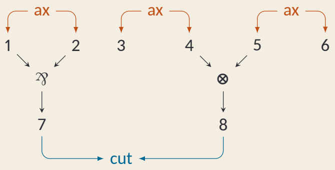




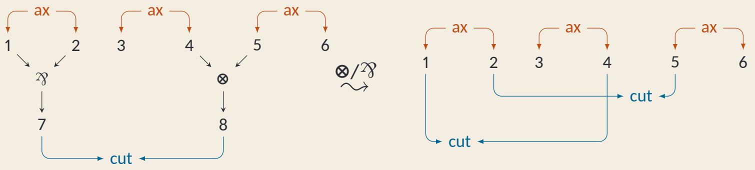
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

On a : représentation alogique + leur correction. Et l'execution ?

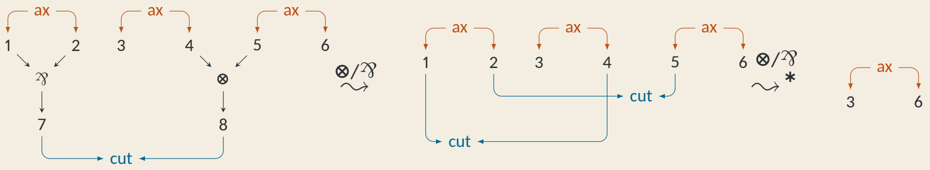
Execution : généralisation de l'élimination des coupures



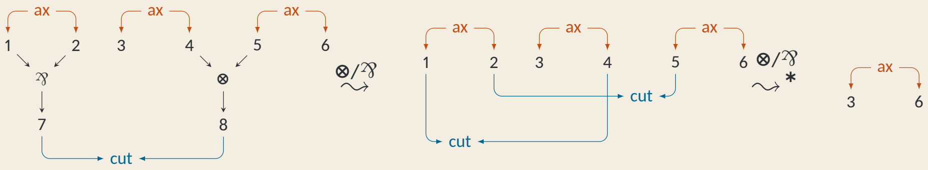
Execution : généralisation de l'élimination des coupures



Execution : généralisation de l'élimination des coupures

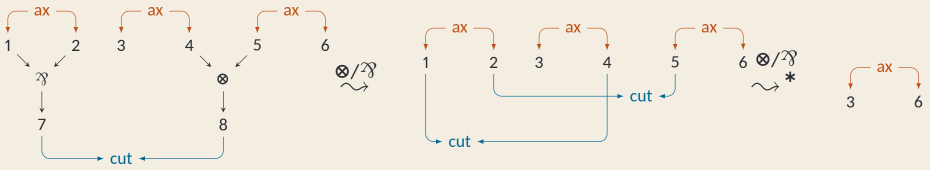


Execution : généralisation de l'élimination des coupures



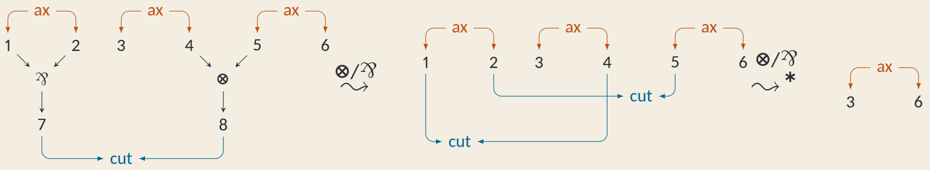
Injections partielles

Execution : généralisation de l'élimination des coupures



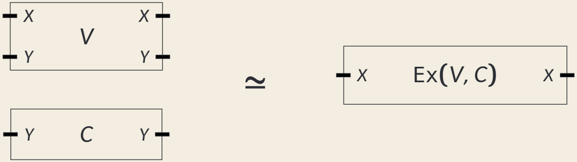
Injections partielles, hors coupure $X = \{3, 6\}$, en coupure $Y = \{1, 2, 4, 5\}$

Execution : généralisation de l'élimination des coupures

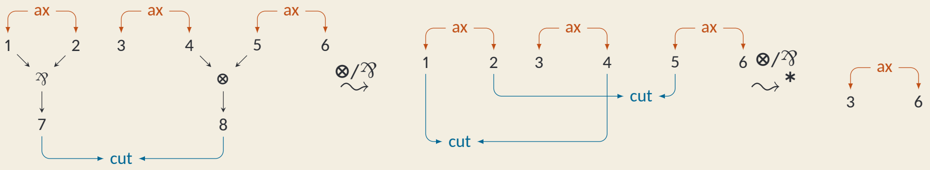


Injections partielles, hors coupure $X = \{3, 6\}$, en coupure $Y = \{1, 2, 4, 5\}$

Equation de rétroaction :

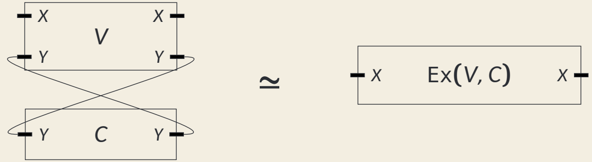


Execution : généralisation de l'élimination des coupures

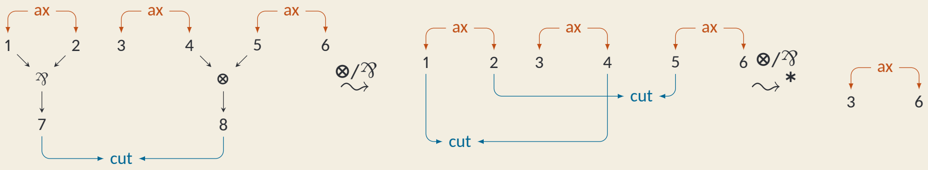


Injections partielles, hors coupure $X = \{3, 6\}$, en coupure $Y = \{1, 2, 4, 5\}$

Equation de rétroaction :

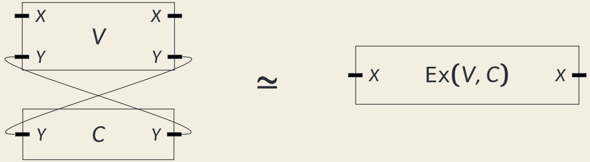


Execution : généralisation de l'élimination des coupures



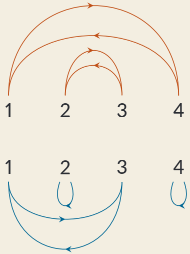
Injections partielles, hors coupure $X = \{3, 6\}$, en coupure $Y = \{1, 2, 4, 5\}$

Equation de rétroaction :

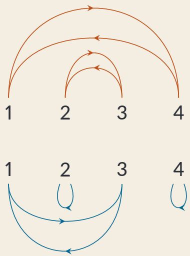


Formule d'exécution : $V[X, X] + \sum_{k=0}^{\infty} V[X, Y] \circ C[Y, Y](V[Y, Y] \circ C[Y, Y])^k \circ V[Y, X]$

Résumé du voyage calcul ⟶ logique

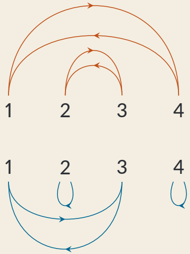


Résumé du voyage calcul ⟶ logique



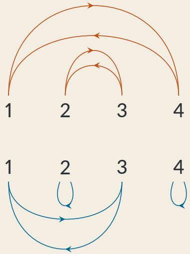
- **Représentation alogique :**

Résumé du voyage calcul ⟶ logique



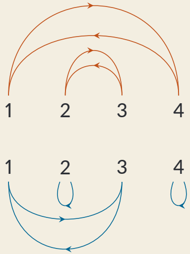
- **Représentation alogique :**
  - Permutations

Résumé du voyage calcul ⟶ logique



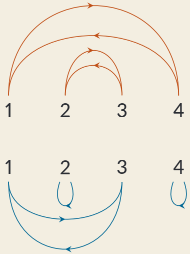
- **Représentation alogique :**
  - Permutations
  - Graphes d'interaction (Thomas Seiller)

Résumé du voyage calcul ⟶ logique



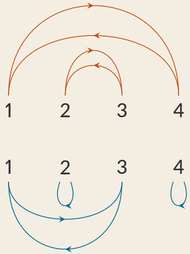
- **Représentation alogique :**
  - Permutations
  - Graphes d'interaction (Thomas Seiller)
  - Isométries partielles (présentation originale)

Résumé du voyage calcul ⟶ logique



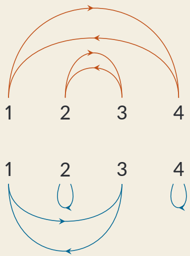
- **Représentation alogique :**
  - Permutations
  - Graphes d'interaction (Thomas Seiller)
  - Isométries partielles (présentation originale)
  - Etoiles et constellations (syntaxe transcendantale)

Résumé du voyage calcul ⟶ logique



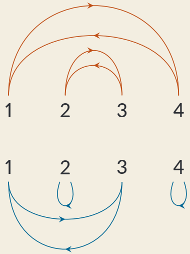
- **Représentation alogique :**
  - Permutations
  - Graphes d'interaction (Thomas Seiller)
  - Isométries partielles (présentation originale)
  - Etoiles et constellations (syntaxe transcendantale)
- **Notion d'interaction/execution.**

Résumé du voyage calcul ⟶ logique



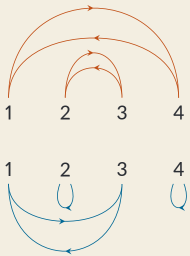
- **Représentation alogique :**
  - Permutations
  - Graphes d'interaction (Thomas Seiller)
  - Isométries partielles (présentation originale)
  - Etoiles et constellations (syntaxe transcendantale)
- **Notion d'interaction/execution.**
- **Notion de preuve (critère de correction) :**
  - $V \perp T$ quand 1 seul "grand" cycle alternant (graphes).

Résumé du voyage calcul ⟶ logique



- **Représentation alogique :**
  - Permutations
  - Graphes d'interaction (Thomas Seiller)
  - Isométries partielles (présentation originale)
  - Etoiles et constellations (syntaxe transcendantale)
- **Notion d'interaction/execution.**
- **Notion de preuve (critère de correction) :**
  - $V \perp T$ quand 1 seul "grand" cycle alternant (graphes).
  - $V \perp T$ quand VT cyclique (permutations).

Résumé du voyage calcul $\longrightarrow$ logique



- **Représentation alogique :**
  - Permutations
  - Graphes d'interaction (Thomas Seiller)
  - Isométries partielles (présentation originale)
  - Etoiles et constellations (syntaxe transcendantale)
- **Notion d'interaction/execution.**
- **Notion de preuve (critère de correction) :**
  - $V \perp T$ quand 1 seul "grand" cycle alternant (graphes).
  - $V \perp T$ quand VT cyclique (permutations).
- **Notion de formule.** Reste à faire...

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

- Choix d'une relation d'orthogonalité $\perp$;

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

- Choix d'une relation d'orthogonalité $\perp$;
- Pré-formule/type : ensemble d'objets calculatoires $\mathbf{A} = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$;

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

- Choix d'une relation d'orthogonalité $\perp$;
- Pré-formule/type : ensemble d'objets calculatoires $\mathbf{A} = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$;

Constructions :

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

- Choix d'une relation d'orthogonalité $\perp$;
- Pré-formule/type : ensemble d'objets calculatoires $\mathbf{A} = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$;

Constructions :

- Orthogonal $\mathbf{A}^{\perp} := \{\Phi \mid \forall \Psi \in \mathbf{A}, \Phi \perp \Psi\}$;

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

- Choix d'une relation d'orthogonalité $\perp$;
- Pré-formule/type : ensemble d'objets calculatoires $\mathbf{A} = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$;

Constructions :

- Orthogonal $\mathbf{A}^{\perp} := \{\Phi \mid \forall \Psi \in \mathbf{A}, \Phi \perp \Psi\}$;
- $\mathbf{A}$ comportement/formule quand $\exists \mathbf{B}. \mathbf{A} = \mathbf{B}^{\perp}$

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

- Choix d'une relation d'orthogonalité $\perp$;
- Pré-formule/type : ensemble d'objets calculatoires $\mathbf{A} = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$;

Constructions :

- Orthogonal $\mathbf{A}^\perp := \{\Phi \mid \forall \Psi \in \mathbf{A}, \Phi \perp \Psi\}$;
- $\mathbf{A}$ comportement/formule quand $\exists \mathbf{B}. \mathbf{A} = \mathbf{B}^\perp$

  ↳ signifie **A** peut-être caractérisé par des tests, **A** est *testable*

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

- Choix d'une relation d'orthogonalité $\perp$;
- Pré-formule/type : ensemble d'objets calculatoires $\mathbf{A} = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$;

Constructions :

- Orthogonal $\mathbf{A}^\perp := \{\Phi \mid \forall \Psi \in \mathbf{A}, \Phi \perp \Psi\}$;
- $\mathbf{A}$ comportement/formule quand $\exists \mathbf{B}. \mathbf{A} = \mathbf{B}^\perp$
  ↳ signifie **A** peut-être caractérisé par des tests, **A** est *testable*
  ↳ équivalent à demander $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp}$;

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

- Choix d'une relation d'orthogonalité $\perp$;
- Pré-formule/type : ensemble d'objets calculatoires $\mathbf{A} = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$;

Constructions :

- Orthogonal $\mathbf{A}^{\perp} := \{\Phi \mid \forall \Psi \in \mathbf{A}, \Phi \perp \Psi\}$;
- $\mathbf{A}$ comportement/formule quand $\exists \mathbf{B}. \mathbf{A} = \mathbf{B}^{\perp}$
  ↳ signifie $\mathbf{A}$ peut-être caractérisé par des tests, $\mathbf{A}$ est *testable*
  ↳ équivalent à demander $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp}$;
- Tenseur $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \{\Phi_A \uplus \Phi_B \mid \Phi_A \in A, \Phi_B \in B\}^{\perp\perp}$;

Reconstitution de la notion de formule

Ingrédients :

- Choix d'une relation d'orthogonalité $\perp$;
- Pré-formule/type : ensemble d'objets calculatoires $\mathbf{A} = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$;

Constructions :

- Orthogonal $\mathbf{A}^\perp := \{\Phi \mid \forall \Psi \in \mathbf{A}, \Phi \perp \Psi\}$;
- $\mathbf{A}$ comportement/formule quand $\exists \mathbf{B}. \mathbf{A} = \mathbf{B}^\perp$
  - ↳ signifie $\mathbf{A}$ peut-être caractérisé par des tests, $\mathbf{A}$ est *testable*
  - ↳ équivalent à demander $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp}$;
- Tenseur $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \{\Phi_A \uplus \Phi_B \mid \Phi_A \in A, \Phi_B \in B\}^{\perp\perp}$;
- Autres connecteurs $\mathbf{A} \parr \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$;

Conclusion

Danos-Regnier : élimination des coupures par exploration de réseau

Conclusion

Danos-Regnier : élimination des coupures par exploration de réseau

↳ évaluation de λ-terme par parcours de leur graphe

Conclusion

Danos-Regnier : élimination des coupures par exploration de réseau
↳ évaluation de λ-terme par parcours de leur graphe

Un successeur : la syntaxe transcendantale.

Conclusion

Danos-Regnier : élimination des coupures par exploration de réseau

↳ évaluation de λ-terme par parcours de leur graphe

Un successeur : la syntaxe transcendantale.

- Comportement **A** caractérisé par tests **B**, i.e. $\exists \mathbf{B}.\mathbf{A} = \mathbf{B}^{\perp}$;

Conclusion

Danos-Regnier : élimination des coupures par exploration de réseau
↳ évaluation de λ-terme par parcours de leur graphe

Un successeur : la syntaxe transcendantale.

- Comportement $\mathbf{A}$ caractérisé par tests $\mathbf{B}$, i.e. $\exists \mathbf{B}. \mathbf{A} = \mathbf{B}^{\perp}$;
- $\mathbf{B}$ peut être infini… Impossibilité de dire si $\Phi \in \mathbf{A}$;

Conclusion

Danos-Regnier : élimination des coupures par exploration de réseau
↳ évaluation de λ-terme par parcours de leur graphe

Un successeur : la syntaxe transcendantale.

- Comportement **A** caractérisé par tests **B**, i.e. $\exists \mathbf{B}.\mathbf{A} = \mathbf{B}^{\perp}$;
- **B** peut être infini... Impossibilité de dire si $\Phi \in \mathbf{A}$;
- Recherche de la vérification effective, développement d'une philosophie ;

Conclusion

Danos-Regnier : élimination des coupures par exploration de réseau
↳ évaluation de λ-terme par parcours de leur graphe

Un successeur : la syntaxe transcendantale.

- Comportement $\mathbf{A}$ caractérisé par tests $\mathbf{B}$, i.e. $\exists \mathbf{B}.\mathbf{A} = \mathbf{B}^{\perp}$;
- $\mathbf{B}$ peut être infini... Impossibilité de dire si $\Phi \in \mathbf{A}$;
- Recherche de la vérification effective, développement d'une philosophie ;
- Inspiration : critères de correction des réseaux.